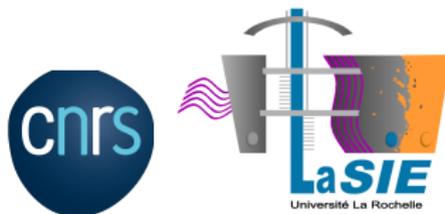


Discrétisation en temps de systèmes dynamiques de Poisson

Oscar Cosserat

November 25, 2022



GdR-GDM, ENS Paris Saclay



- 1 Exemples de systèmes dynamiques à symétrie
- 2 Dynamique hamiltonienne
- 3 Discrétisation en temps
 - Bi-réalisation et équation de Hamilton-Jacobi
- 4 Analyse rétrograde
 - Série de Magnus
 - Application à l'analyse rétrograde

Action coadjointe

Soit G un groupe de Lie et \mathfrak{g} son algèbre de Lie.

- 1 $G \curvearrowright G$ par conjugaison,
- 2 induisant l'action adjointe $G \curvearrowright \mathfrak{g}$
- 3 puis l'action coadjointe $G \curvearrowright \mathfrak{g}^*$
- 4 et sa version infinitésimale $\mathfrak{g} \curvearrowright \mathfrak{g}^*$.

Équation d'Euler

Si $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$, $dH \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g})$ et induit l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \text{ad}_{d_{x(t)}H}^* \cdot x(t) \\ x(0) \in \mathfrak{g}^* \end{cases}$$

Proposition

- H est préservé : $H(x(t)) = H(x(0))$,
- $x(t)$ et $x(0)$ restent sur une même orbite de l'action coadjointe de G sur \mathfrak{g}^* ,
- la transposée du flot préserve les crochets de Lie de \mathfrak{g} .

Exemples

Groupe	Hamiltonien	Équation
$SO(3)$	$H(x) = \text{Tr}(x.I.x^T)$	Dynamique du solide rigide
$\text{Diff}(S^1)$	$H(u) = \int_{S^1} u^2$	Burgers non visqueux
$\text{Diff}(S^1) \times \mathbb{R}$	$H(u, c) = c^2 + \int_{S^1} u^2$	Korteweg-de Vries
$\text{Diff}(S^1) \times \mathbb{R}$	$H(u, c) = c^2 + \int_{S^1} u^2 + (u')^2$	Camassa-Holm
$\text{Diff}_\mu(M)$	$H(u) = \int_M \ u\ ^2 d\mu$	Fluide parfait
$\text{Diff}(M) \times \mathcal{C}^\infty(M)$	$H(u, \rho) = \int_M \rho \ u\ ^2 + f(\rho) d\mu$	Fluide barotrope

Définition

Definition

M une variété, une structure de Poisson $\{.,.\}$ est un crochet de Lie sur $\mathcal{C}^\infty(M)$ vérifiant la règle de Leibniz. C'est-à-dire :

- (i) $\{.,.\}$ est bilinéaire et antisymétrique
- (ii) formule de Leibniz : $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$
- (iii) formule de Jacobi : $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$

Remarque

$\{.,.\}$ fournit un unique champ de bi-vecteurs $\pi \in \Gamma(\Lambda^2 TM)$ par :

$$\{f, g\}(x) = \langle \pi(x), d_x f \wedge d_x g \rangle, \quad \forall x \in M, f, g \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Exemples

Exemple

- 1 Structure symplectique en coordonnées canoniques :
$$\pi = \partial_p \wedge \partial_q$$
- 2 Dual d'une algèbre de Lie : $\{f, g\}(x) = \langle x, [d_x f, d_x g] \rangle$
- 3 Crochets quadratiques : $\pi = a_{i,j} x^i x^j \partial_{x_i} \wedge \partial_{x_j}$

Dynamique de Poisson

Definition

Pour $H \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $X_H = \langle \pi, [dH, \cdot] \rangle$ est son champ de vecteurs hamiltonien associé. On note ϕ_H^t son flot.

Exemple (En coordonnées)

Si $\pi(x) = \pi^{ij}(x)\partial_{x_i} \wedge \partial_{x_j}$, $X_H(x) = \pi^{ij}(x)\partial_{x_i} H(x)\partial_{x_j}$

Proposition (I. Conservation du hamiltonien au cours du temps)

$$H \circ \phi_H^t = H$$

Géométrie d'une structure de Poisson

Theorem

*Toute structure de Poisson induit un feuilletage **singulier** de l'espace en variétés symplectiques.*

Remarque

Il implique l'existence de fonctions locales constantes sur chaque feuille appelées Casimirs.

Proposition (II. Flot hamiltonien et feuilletage)

Une trajectoire hamiltonienne reste sur une feuille symplectique : x et $\phi_H^t(x)$ appartiennent à la même feuille.

Exemples de feuilletage

Exemple

- Le feuilletage d'une variété symplectique se compose d'une unique feuille : l'espace tout entier.
- Le feuilletage symplectique du dual d'une algèbre de Lie est donné par les orbites coadjointes.

Definition

$\phi : (P_1, \{.,.\}_1) \rightarrow (P_2, \{.,.\}_2)$ est un (anti-) morphisme de Poisson si :

$$\forall f, g \in C^\infty(P_2), \{f \circ \phi, g \circ \phi\}_1 = (-)\{f, g\}_2 \circ \phi$$

Remarque

En coordonnées : ${}^t\phi'(x) \cdot (\pi_1^{ij}(x))_{i,j} \cdot \phi'(x) = (\pi_2^{ij}(\phi(x)))_{i,j}$

Proposition (III. Préservation du tenseur de Poisson)

Le flot hamiltonien est un isomorphisme de Poisson.

Définition

Definition

- Une bi-réalisation (groupeïde symplectique local,...) de la variété de Poisson est un triplé (U, α, β) telle que :
 - 1 U est un voisinage de la section nulle dans T^*M ,
 - 2 $\alpha, \beta: T^*M \rightarrow M$ sont des submersions, respectivement Poisson et anti-Poisson, telles que $\alpha \circ \sigma = \beta \circ \sigma = Id_M$,
 - 3 Les fibres de α sont symplectiquement orthogonales aux fibres de β : $\{\alpha^*f, \beta^*g\} = 0 \forall f, g \in C^\infty(M)$.
- Une bisection lagrangienne est une sous-variété lagrangienne de T^*M telle que α et β s'y restreignent en des difféomorphismes.

Exemples de bi-réalisation

- $so^*(3)$ On identifie $so(3) \cong so^*(3)$ par une métrique Ad-invariante et $Tso(3) \cong so(3) \times so(3)$:

$$\begin{cases} \alpha: so(3) \times so(3) \rightarrow so(3) : (A, x) \mapsto (I + \frac{A}{4}) \cdot x \cdot (I - \frac{A}{4}) \\ \beta: so(3) \times so(3) \rightarrow so(3) : (A, x) \mapsto (I - \frac{A}{4}) \cdot x \cdot (I + \frac{A}{4}) \end{cases} .$$

- $\pi^{ij} = a_{ij} x^i x^j$

$$\begin{cases} \alpha: T^*\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : (x, p) \mapsto \left(e^{-\frac{1}{2} \sum_i a_{ij} x_i p_i} \cdot x_j \right)_{j=1, \dots, n} \\ \beta: T^*\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : (x, p) \mapsto \left(e^{\frac{1}{2} \sum_i a_{ij} x_i p_i} \cdot x_j \right)_{j=1, \dots, n} \end{cases}$$

Remarque

Il est aisé d'en construire pour les duals d'algèbre de Lie, moyennant un difféomorphisme local entre G et \mathfrak{g} .



Équation de Hamilton-Jacobi pour une bi-réalisation

Dans une bi-réalisation (U, α, β) , en mettant en relation les 1-formes de variation de $(\text{Graphe}(dS_t))_t$ et de $(\phi_{\alpha^*H}^t(M))_t$, on obtient le :

Theorem (O.C., 2022)

1 *L'équation de Hamilton-Jacobi*

$$\begin{cases} \partial_t S_t(m) &= H(\alpha(d_m S_t)) \\ S_0 &= 0 \end{cases}$$

admet une solution $(S_t)_t$ pour t au voisinage de 0.

2 *La famille d'automorphisme de Poisson induit par les bisections lagrangiennes associées à $(dS_t)_t$ est le flot de H .*

Équation de Hamilton-Jacobi à ordre fini

Theorem (O.C., 2022)

En définissant récursivement une famille $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de fonctions lisses sur M par $S_0 = 0$, $S_1 = H$, $S_2(m) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} H(\alpha(tdH(m)))$, et

$$S_{k+1}(m) = \frac{1}{(k+1)!} \frac{d^k}{dt^k} \Big|_{t=0} H(\alpha(d_m S_t^{(k)})), \text{ où } S_t^{(k)} = \sum_{j=1}^k t^j S_j,$$

la famille d'automorphismes de Poisson associée aux bisections lagrangiennes $(d(S_t^{(k)}))_t$ correspond au flot de H jusqu'à l'ordre k en t : $\beta \circ \alpha_{|dS_t^{(k)}}^{-1} = \phi_H^t + o(t^k)$

Solide rigide

On résoud

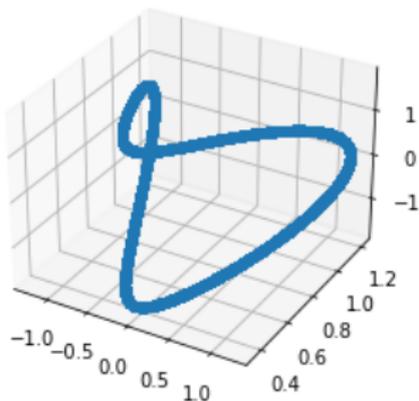
$$\dot{x} = \text{ad}_{I^{-1}x}^* \cdot x$$

où $x \in \mathfrak{so}(3)^*$ et $I: \mathfrak{so}(3)^* \rightarrow \mathfrak{so}(3)$ est l'isomorphisme induit par le tenseur d'inertie.

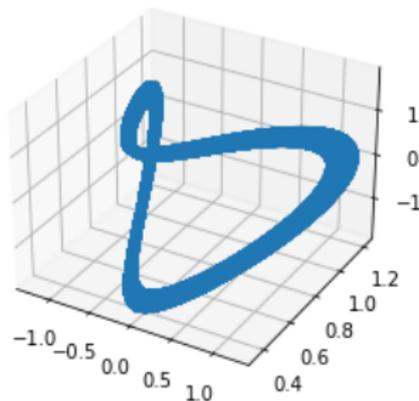
On pose $x_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, le tenseur d'inertie

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \Delta t = 10^{-1} \text{ and } T = 10^5.$$

Comparaison de trajectoires discrétisées



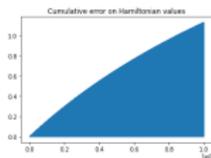
Trajectoire avec notre
méthode à l'ordre 4



Trajectoire avec Runge-Kutta
4

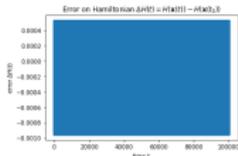
Comparaison avec Runge-Kutta 4

■ Runge-Kutta d'ordre 4

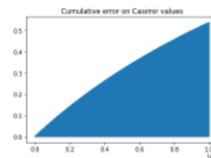


Erreur du hamiltonien : 10^0

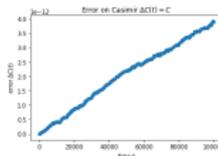
■ notre méthode à l'ordre 4



Erreur du hamiltonien : 10^{-3}



Erreur du Casimir : 10^0



Erreur du Casimir : 10^{-12}

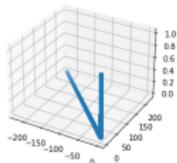
Lotka-Volterra

On résoud

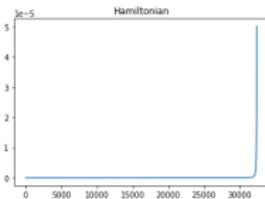
$$\begin{cases} \dot{x} = -x(y + z) \\ \dot{y} = y(-x + z) \\ \dot{z} = z(x + y) \end{cases} .$$

On pose $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.001 \\ 1.4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\Delta t = 10^{-4}$ and $T = 3,244$.

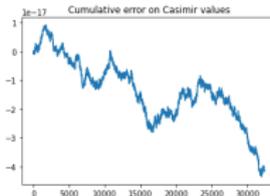
Simulations numériques au voisinage d'une singularité



La trajectoire explose
en temps fini

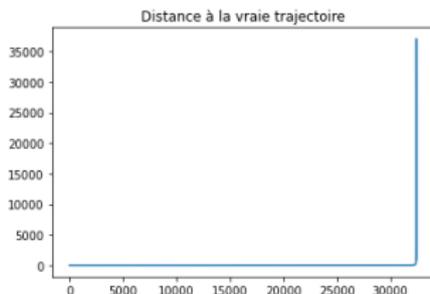


Erreur de
l'hamiltonien pour
notre méthode à
l'ordre $1 : 10^{-5}$

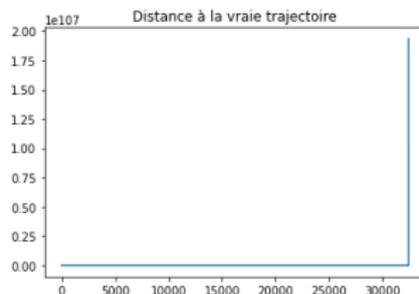


Erreur du Casimir
pour notre méthode à
l'ordre $1 : 10^{-17}$

Comparaison de trajectoires discrétisées au voisinage d'une singularité



Distance à la vraie trajectoire
avec notre méthode à l'ordre
1 à $T = 3,246 : 10^5$



Distance à la vraie trajectoire
avec Runge-Kutta 2 à
 $T = 3,246 : 10^{207}$

Définition

Soit $(H_t)_t \in \mathcal{C}^\infty(M \times I)$ un hamiltonien dépendant du temps.

Définition (Série de Magnus)

La série de Magnus de H

$$\mathcal{M}_\epsilon(H) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\epsilon^i}{i!} \mathcal{M}(H)_i \in \mathcal{C}^\infty(M) [[\epsilon]]$$

of $(H_t)_{t \in I}$ est définie par l'équation différentielle formelle :

$$\begin{cases} \mathcal{M}_0(H) & = 0 \\ \partial_\epsilon \mathcal{M}_\epsilon(H) & = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_i}{i!} \text{ad}_{\mathcal{M}_\epsilon(H)}^i H [[\epsilon]] \end{cases}$$

Théorème

Soit $(H_t)_t \in \mathcal{C}^\infty(M \times I)$ un hamiltonien dépendant du temps, $\epsilon \in I$ et $\mathcal{M}_\epsilon(H)^{(k)} \in \mathcal{C}^\infty(M)$ la troncature à l'ordre k en ϵ de sa série de Magnus.

Theorem (O.C., 2022)

Les flots hamiltonien de $(H_t)_t$ au temps ϵ et de $\mathcal{M}_\epsilon(H)^{(k)}$ au temps 1 sont égaux à l'ordre k :

$$\Phi_{(H_t)_t}^\epsilon - \Phi_{\mathcal{M}_\epsilon(H)^{(k)}}^1 = o(k).$$

Calcul du hamiltonien modifié

Remarque

La série de Magnus permet de retrouver en une formule les résultats d'analyse rétrograde d'intégrateurs symplectiques de la littérature.

Par ailleurs, elle est un outil algébrique d'estimation de l'erreur :

Theorem (O.C., 2022)

Le hamiltonien modifié de l'intégrateur de Poisson donné par la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi $S_t^{(k)}$ à l'ordre k est la série de Magnus de $(\tau_{\underline{dS_t^{(k)}}} \circ \alpha_{\underline{dS_t^{(k)}}}^{-1})^ \partial_t S_t^{(k)}$.*

Merci pour votre attention !